Concours GE2I/GMEC session 2014

Composition : **Mathématiques 3** (algèbre)

Durée : **4 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n° 1 :

On désigne par $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

1) On considère les applications définies sur E par :

   a. $\phi_1(P) = P(0)P(1)$

   b. $\phi_2(P) = P(0)P(1)P(2)$

   c. $\phi_3(P) = P(0)P(1) + P(0)$

   d. $\phi_4(P) = \Big|P(0)P(1)\Big|$

   Ces applications sont-elles des formes quadratiques ? Justifiez soigneusement vos réponses.

2) On suppose dans la suite que $n = 2$. On pose : $\phi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big[P(t)\Big]^2 dt, \quad P \in E.$

   a. Montrer que ϕ munit E d'une structure euclidienne.

   b. À partir de la base canonique de E, déterminer une base orthonormée pour ϕ.

Exercice n° 2 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice n° 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2) Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3) Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Écrire la matrice de φ dans cette base.
5) Résoudre le système différentiel : $X' = AX$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4 :

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice dans $\mathscr{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

1) Reconnaître f.
2) Montrer que $id_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.
3) Montrer que $g = (id - f) \circ (id + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Exercice n° 5 :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on désigne par E^* son espace dual c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur E. On considère les éléments de E^* définis par : pour tout $(x, y, z) \in E$

$$f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z, \quad f_2(x,y,z) = 2x + 3y + 4z, \quad f_3(x,y,z) = 3x + 4y + 6z.$$

1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
2) Trouver la base duale.

Problème :

On considère les applications suivantes de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ vers lui-même :

$$f_1 : x \mapsto x; \quad f_2 : x \mapsto 1-x; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x-1};$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}; \quad f_5 : x \mapsto \frac{x}{x-1}; \quad f_6 : x \mapsto \frac{x-1}{x}.$$

On note $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

1) a. Vérifier que ces six applications sont bien à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

   b. Compléter la table de G ci-dessous pour la composition, les résultats seront donnés si possible sous la forme : f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ou f_6

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

2) En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe, on précisera l'élément neutre, et le symétrique de chaque élément de G. Est-il commutatif ?
   Dans la suite on détermine tous les sous-groupes de $(G, \circ)$.

3) Déterminer les sous-groupes de cardinal 1, et les sous-groupes de cardinal 6.

4) a. Soit $(H, *)$ un groupe d'élément neutre e et soit $x \in H$, avec $x \neq e$.
   Montrer que $\{e, x\}$ est un sous-groupe de $(H, *)$ si et seulement si $x * x = e$.

   b. En déduire les sous-groupes de G de cardinal 2.

5) a. Soit $(H, *)$ un groupe d'élément neutre e et soit $x, y \in H$, distincts de e.
   Montrer que $\{e, x, y\}$ est un sous-groupe de $(H, *)$ si et seulement si $y = x^{-1}$ et $x * x * x = e$.

   b. En déduire les sous-groupes de G de cardinal 3.

6) a. Soit H un sous-groupe de $(G, \circ)$ contenant f_3.
   Montrer que si f_2 ou f_4 ou f_5 est dans H, alors $H = G$.

   b. En déduire les sous-groupes de G de cardinal 4.

7) Déterminer les sous-groupes de G de cardinal 5.